Calcul de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$

1) Existence de l'intégrale.

La fonction $f\ :\ t \mapsto \dfrac{\ln t}{t-1}$ dt est continue sur $]0,1[$ et donc localement intégrable sur $]0,1[$.

- Quand t tend vers 0, $\left|\dfrac{\ln t}{t-1}\right| \sim |\ln t| = o\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$. Par suite, f est intégrable au voisinage de 0.
- Quand t tend vers 1, $\dfrac{\ln t}{t-1} \sim 1$. Ainsi, f se prolonge par continuité en 1 et est donc intégrable au voisinage de 1.

Finalement, f est intégrable sur $]0,1[$ et on peut poser $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt$.

2) Transformation de l'intégrale.

Soit n un entier naturel. Pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln t}{t-1} = -\ln t \times \frac{1}{1-t} = -\ln t\left(\sum_{k=1}^{n} t^k + \frac{t^{n+1}}{1-t}\right) = \sum_{k=1}^{n} -t^k \ln t - \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}.$$

Chacune des fonctions $t \mapsto -t^k \ln t$ est intégrable sur $]0,1[$ car continue sur $]0,1[$, négligeable devant $\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ quand t tend vers 0 et prolongeable par continuité en 1. On en déduit aussi que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{n+1}\ln t}{1-t}$ est intégrable sur $]0,1[$ en tant que combinaison linéaire de fonctions intégrables sur $]0,1[$. Par intégration, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{k=0}^{n} I_k + J_n \text{ où } I_k = -\int_0^1 t^k \ln t\,dt \text{ et } J_n = -\int_0^1 \frac{t^{n+1}\ln t}{1-t}\,dt.$$

3) Calcul de I_k. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in]0,1[$. Les deux fonctions $t \mapsto \dfrac{t^{k+1}}{k+1}$ et $t \mapsto -\ln t$ sont de classe C^1 sur $[\varepsilon,1]$. On peut donc effectuer une intégration par parties qui fournit

$$\int_\varepsilon^1 -t^k \ln t\,dt = \left[-\frac{t^{k+1}}{k+1}\ln t\right]_\varepsilon^1 + \frac{1}{k+1}\int_\varepsilon^1 t^k\,dt = \frac{\varepsilon^{k+1}\ln\varepsilon}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2}(1-\varepsilon^{k+1}).$$

Quand ε tend vers 0, on obtient $I_k = \dfrac{1}{(k+1)^2}$. Ainsi

$$\forall k \in \mathbb{N},\ I_k = \frac{1}{(k+1)^2}.$$

4) Convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$J_n = \int_0^1 t^n \frac{-t\ln t}{1-t}\,dt.$$

La fonction $t \mapsto \dfrac{-t\ln t}{1-t}$ est continue sur $]0,1[$ et se prolonge par continuité en 0 et en 1. Cette fonction est donc bornée sur $]0,1[$ et il existe un réel M tel que pour tout $t \in]0,1[$, $\left|\dfrac{-t\ln t}{1-t}\right| \leq M$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$|J_n| \leq \int_0^1 t^n \left|\frac{-t\ln t}{1-t}\right|\,dt \leq |M|\int_0^1 t^n\,dt = \frac{M}{n+1}.$$

Cette dernière expression tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$.

5) Calcul de I. D'après ce qui précède, $I = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} I_k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

